

I. Дробно – рациональный этап.

- 1.1 (1 балл) Упростите выражение: $\left(\frac{25}{a^2+5a+25} - \frac{2a}{5-a} - \frac{a^3+25a^2}{a^3-125}\right) \cdot \left(a - 5 + \frac{15a}{a-5}\right)$.
- 1.2 (3 балла) Решите уравнения: $\frac{12}{x^2+2x} - \frac{3}{x^2+2x-2} = 1$.
- 1.3 (5 баллов) Сократите дробь: $\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$.
- 1.4 (5 баллов) Найдите все целые a и b такие, что $a^4 + 4b^4$ является простым числом.

II. Иррациональный этап.

- 2.1 (1 балл) Упростите: $(3 - \sqrt{10}) \cdot \sqrt{\sqrt{10} + 2} + \sqrt{7\sqrt{10} - 22}$
- 2.2 (3 балла) Упростите: $\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}(5+2\sqrt{6})(49-20\sqrt{6})}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}$.
- 2.3 (3 балла) Число $1 + \sqrt{2}$ является корнем уравнения $x^2 + ax + b = 0$ с рациональными коэффициентами a и b . Найдите a и b .
- 2.4 (5 баллов) Упростите $\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} - \frac{1}{x}\right)$, $0 < x < 1$;

III. Олимпиадный этап.

- 3.1 (1 балл) Максим ошибся, записывая десятичную дробь: цифры записал верно, а запятую сдвинул на одну позицию. В результате получилось число, которое меньше нужного на 19,71. Какое число должен был записать Максим?
- 3.2 (3 балла) В десятичной записи числа $\frac{3}{7}$ вычеркнули 2022-ю цифру после запятой. Что больше: полученное число или $\frac{3}{7}$?
- 3.3 (3 балла) Ярик загадал двузначное число, а затем приписал к нему слева цифру 1, а справа — цифру 8, отчего число увеличилось в 28 раз. Какое число мог загадать Ярик? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.).
- 3.4 (5 баллов) На прямоугольной доске размером $m \times n$ клеток тех клеток, которые граничат с краем, оказалось столько же, сколько остальных клеток. Найдите все пары целых положительных чисел $(m; n)$, при которых доска обладает описанным свойством.

IV. Квадратные уравнения и Ко.

- 4.1 (3 балла) Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 19 \\ xy + 2y^2 = 18 \end{cases}$.
- 4.2 (5 баллов) Решите для любого значения параметра a уравнения: $ax^2 - 4x + (a + 3) = 0$.
- 4.3 (5 баллов) При каких значениях параметра a уравнение: $\frac{ax^2+2x-3}{x-1} = 0$ имеет единственное решение?
- 4.4 (7 баллов) Решите уравнение: $\frac{x^2-2x+1}{(x+2)^2} + \frac{x^2+2x+1}{(x-3)^2} = \frac{(2x^2-x+5)^2}{2 \cdot (x+2)^2 \cdot (x-3)^2}$.

V. Геометрический этап.

- 5.1 (1 балл) В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании равна одной из сторон. Найдите углы треугольника.
- 5.2 (3 балла) На клетчатой бумаге (см. рис.) отмечены точки A, B, C, D и E . Докажите, что $\angle ACB = \angle DCE$.
- 5.3 (5 баллов) BK – биссектриса треугольника ABC . Известно, что $AB = AC$, а $BC = AK + BK$. Найдите углы треугольника ABC .
- 5.4 (5 баллов) Квадрат $ABCD$ и прямоугольник $MBND$ имеют общую диагональ BD . MD и AB пересекаются в точке E , а BN и CD – в точке F . Площадь $EBFD$ в четыре раза меньше площади квадрата. Найдите отношение площадей квадрата и прямоугольника $MBND$.

